

IL COLPO DI KARATE

La fisica del *tameshiwari*

di A. Biryukov

Il termine *tameshiwari* nel karate indica la verifica dell'allenamento psicologico e dell'abilità di colpire oggetti di vario genere con le mani. Il karate è giunto in occidente da Okinawa, in Giappone. E' stato sviluppato nel XVI e XVII secolo, quando, per paura delle ribellioni, le autorità governative confiscarono tutte le armi al popolo, compresi i coltelli rituali e quelli da cucina. A mani nude, i contadini sarebbero stati impotenti davanti ai Samurai armati fino ai denti, ma avrebbero potuto comunque fermare le bande di briganti grazie al karate. Probabilmente questo spiega l'origine del *tameshiwari*, che riscuote sempre grande interesse di pubblico e ha del miracoloso presso gli stessi iniziati. Oggi, il *tameshiwari* viene praticato per lo più in dimostrazioni pubbliche e gare di karate, e come bersaglio si usano tavolette più o meno grandi, di legno di conifera (morbido).

In questo articolo prenderemo in considerazione il modello fisico di una mano che colpisce una tavoletta, da cui trarremo alcune valutazioni, ed esamineremo i possibili limiti nei risultati atletici del *tameshiwari*. Per ottenere i parametri di questo modello, dobbiamo prima risolvere alcuni problemi, di per sé interessanti. Per non perdere il filo del discorso, tuttavia, preferiamo occuparcene nelle appendici, alla fine dell'articolo.

Prendiamo un colpo sferrato da un pugno avente massa m che arriva alla velocità v al centro di una tavoletta di dimensioni d , l e h appoggiata su due supporti (fig. 1).

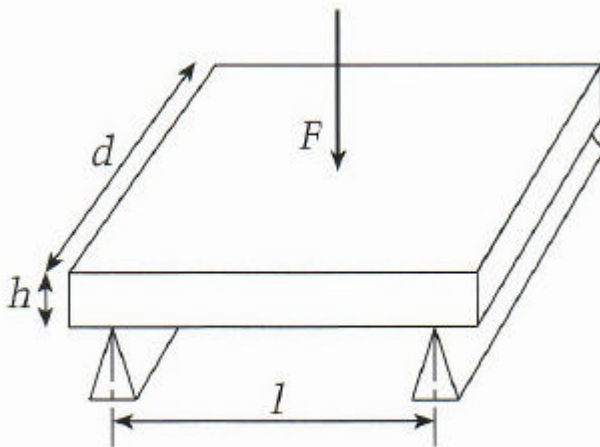


Figure 1

Le fibre del legno sono parallele ai supporti, la distanza dei quali è approssimativamente pari alla lunghezza l della tavoletta. Uno dei segreti del karate dice che per aumentare l'efficacia al colpo, si deve applicare una forza F al pugno in accelerazione appena prima del contatto e mantenerla per tutto il tempo della collisione. Noi prenderemo in considerazione la deformazione della tavoletta nel nostro sistema di riferimento, come mostrato nella figura 2. Chiamiamo x_0 lo spostamento del centro della tavoletta dalla sua posizione di equilibrio. Ipotizziamo che la rottura della tavoletta, visibile da quella della sua superficie, avvenga a un valore di $x_0 = x_t$, quando la tensione \mathbf{s} (la forza applicata in un'unica zona della sezione della tavoletta) raggiunge il valore critico \mathbf{s}_t , che dipende dalla resistenza del materiale.

Per prima cosa troviamo la relazione tra x_t e \mathbf{s}_t , determinata dalle proprietà elastiche e dalla forma geometrica della tavoletta. Il massimo della curvatura e della tensione sulla superficie si avranno al centro della tavoletta. Nell'appendice 1 mostriamo come si arriva alla definizione della tensione con la formula

$$\mathbf{s} = \frac{Yh}{2R}$$

dove R è il raggio di curvatura della linea centrale CC nel mezzo della tavoletta (figura 2) e Y è il modulo di Young per il tipo di legno.

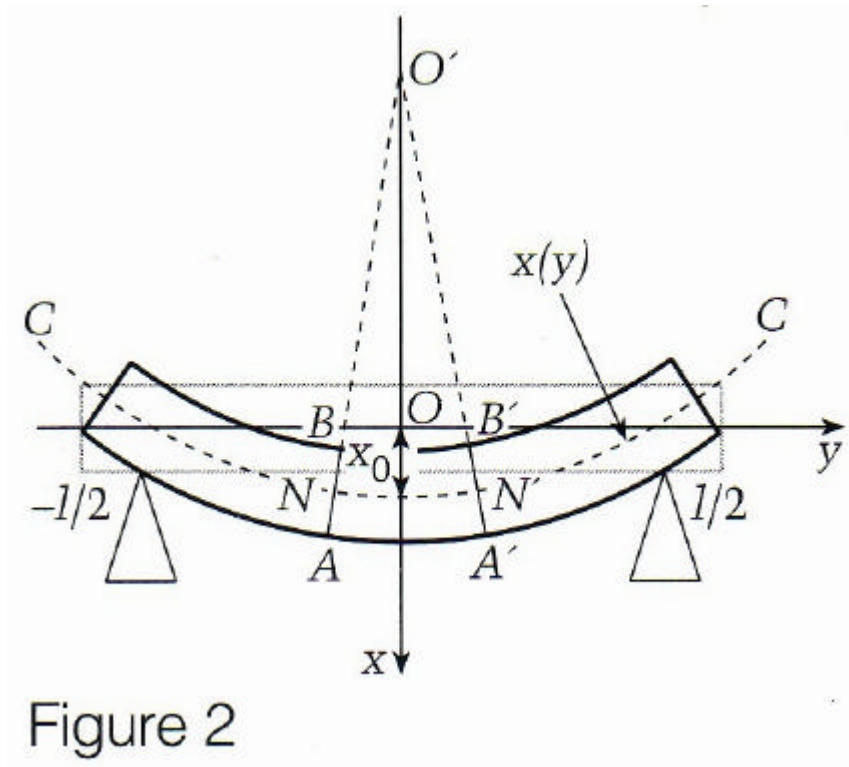


Figure 2

Ora, ipotizziamo una forma particolare per la tavoletta deformata, e consideriamo che le sue estremità siano fissate ai punti $y = \pm l/2$, e che il massimo spostamento dell'equilibrio coincida con il centro della tavoletta. Notate che la forma esatta della tavoletta dipende (è evidente) dalle specifiche condizioni dell'interazione tra la superficie di contatto del pugno e la tavoletta (un colpo corretto viene dato con le nocche del medio e dell'indice). Nei nostri calcoli utilizzeremo formule pratiche ricavate su base sperimentale, che ci portano ad alcune semplici osservazioni.

Proviamo ad approssimare la curvatura della tavoletta con il coseno tra i punti $y = \pm l/2$. In questo caso, lo spostamento per ciascun punto lungo la linea centrale dipende dalla sua coordinata y , così calcolata:

$$x(y) = x_0 \cos\left(\frac{\mathbf{p}y}{l}\right)$$

L'appendice 2 mostra che il raggio di curvatura corrispondente nel centro della tavoletta sarà:

$$R = \left(\frac{l}{\mathbf{p}}\right)^2 \frac{1}{x_0}$$

Inserendo il risultato nella formula per determinare \mathbf{s} si ricava la tensione superficiale nel mezzo della tavoletta, quando il centro è spostato di x_0 :

$$\mathbf{s} = \frac{x_0 Y h \mathbf{p}^2}{2l^2}$$

La formula mostra che la rottura ($\mathbf{s} = \mathbf{s}_t$) avviene quando il centro della tavoletta è spostato di:

$$x_t = \frac{2\mathbf{s}_t l^2}{\mathbf{p}^2 Y h}$$

Ora proviamo a simulare le proprietà elastiche della tavoletta con una molla avente costante k di elasticità che viene sollecitata da una forza esterna. In appendice 3 dimostriamo che la costante di elasticità è pari a:

$$k = \frac{\mathbf{p}^2 Y h^3 d}{3l^3}$$

Determinati i parametri necessari, torniamo all'iniziale quesito dinamico di un pugno che colpisce una tavoletta. Il moto del pugno è descritto dalla seconda legge di Newton:

$$m\ddot{x} = -kx + F$$

dove x , d'ora in poi indica lo spostamento del pugno dalla posizione iniziale di contatto con la tavoletta, e i simboli primi la derivazione rispetto al tempo.

Per semplificare, ipotizziamo che la forza F , applicata al pugno dal braccio, sia costante. La sostituzione produce la seguente espressione:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F}{k}$$

che comprende due costanti arbitrarie, A e B . Per determinarle, specifichiamo la condizione iniziale $x=0$ e $x'=v$ con $t=0$. Allora avremo:

$$x = \frac{f}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{v}{\omega} \sin \omega t$$

dove $f = F/m$ ha dimensioni di accelerazione, e $\omega = \sqrt{k/m}$ è la frequenza d'oscillazione naturale del pugno sotto l'azione della forza elastica della tavoletta.

Il passo successivo sarà determinare il massimo spostamento x_{max} del pugno per una data velocità iniziale v e una forza F . Uguagliando la derivata temporale di x a zero, con la conseguente eliminazione di t , avremo:

$$x_{max} = \frac{f}{\omega^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v \omega}{f} \right)^2} \right)$$

Per ottenere le condizioni di rottura, lo spostamento dev'essere uguale a x_t , e quindi avremo:

$$\frac{2S_t h^2 d}{3Fl} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\rho^2 Y h^3 v^2 dm}{3F^2 l^3}}$$

che collega le proprietà del legno e la geometria della tavoletta ai parametri di collisione. Risolviamo l'equazione per F usando di nuovo i parametri x_t e k .

$$F = \frac{kx_t}{2} - \frac{mv^2}{2x_t}$$

Perché la tavoletta si rompa, questa forza deve essere applicata nel momento del contatto al pugno che si muove a velocità iniziale v . Notiamo che se la velocità del pugno è abbastanza alta, il valore di F diventa negativo. Quindi, la forza non è necessaria per rompere una tavoletta se il pugno è in movimento (analogamente, non c'è bisogno di applicare una forza ad un martello quando vogliamo piantare dei chiodi nel legno). In questo caso, la velocità iniziale del pugno dev'essere maggiore di:

$$v = x_t \omega = \frac{2S_t}{\rho \sqrt{3}} \sqrt{\frac{lh d}{mY}}$$

che è proporzionale alla radice quadrata dello spessore h della tavoletta. Per contrasto, se la velocità iniziale del pugno è zero, allora la formula indica che per rompere la tavoletta la forza non può essere minore di

$$F = \frac{kx_t}{2} = \frac{h^2 \mathbf{s}_t d}{3l}$$

Che è proporzionale al quadrato dello spessore h della tavoletta. Quindi, per rompere una tavoletta più spessa, è opportuno incrementare la velocità del pugno piuttosto che la sua forza. Ora, risolviamo l'equazione che determina le condizioni di rottura della tavoletta, cioè troviamo quale dev'essere il suo spessore h per i dati parametri del colpo:

$$h = \frac{3\mathbf{p}^2 Y v^2 m}{8\mathbf{s}_t^2 l d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{64Fl^3 \mathbf{s}_t^3 d}{3\mathbf{p}^4 Y^2 v^4 m^2}} \right)$$

Cerchiamo di ottenere dei valori utilizzando i seguenti parametri sperimentali per il legno: $E = 10^8 \text{ N/m}^2$ e $\mathbf{s}_t = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. La tavoletta standard nel tameshiwari ha una larghezza di 20 cm e una lunghezza di 30 cm. Consideriamo $l = 25 \text{ cm}$, perché le estremità della tavoletta, situate oltre i supporti, possono essere ignorate. La massa del pugno è di 1 kg, avambraccio compreso. La figura 3 mostra la relazione tra la forza F e la velocità iniziale v per diversi spessori h della tavoletta. Se l'incrocio tra F e v corrisponde ad un punto situato al di sopra della curva per uno specifico valore di h , la tavoletta si rompe.

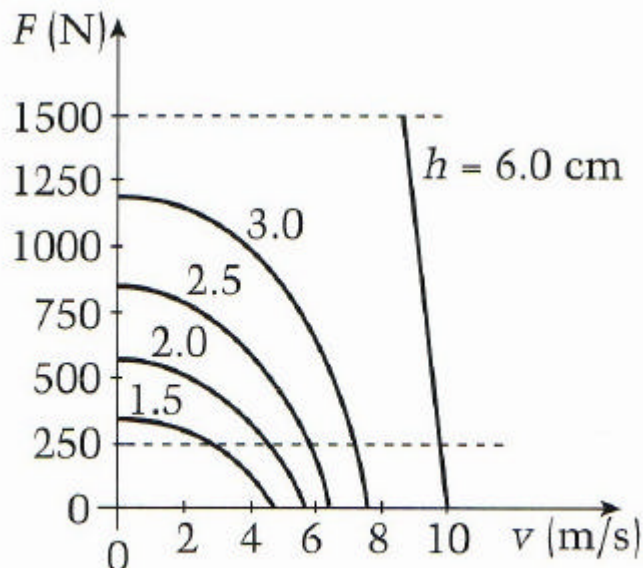


Figure 3

Ora possiamo valutare qual è il massimo spessore che può arrivare a rompere un uomo. La forza sviluppata dalla mano di un uomo medio è $F = 250 \text{ N}$. La figura 3 mostra che con $v = 0$ un uomo non può rompere neanche una tavoletta spessa 1,5 cm. Per farlo, deve

applicare una forza di almeno 300 N. Il valore sperimentale per la massima velocità di un pugno è di circa 10m/s. Applicando i valori di $v=10\text{m/s}$ e $F=250\text{N}$ nella formula per determinare h troviamo lo spessore della tavoletta: 6 cm. Una misura considerevole, probabilmente accessibile solo ad esperti di karate con un'eccezionale padronanza tecnica e psicologica. Tuttavia, lettori curiosi possono provare a rompere una tavoletta spessa 2cm, perché i valori necessari di forza e velocità sono alla portata di un individuo di media corporatura. In questa pratica, è bene seguire il precetto "segreto" del karate: "mai dubitare di se stessi".

APPENDICE 1

Troviamo la tensione sulla superficie della tavoletta. Consideriamo due sezioni simmetriche AB e $A'B'$ (figura 2), perpendicolari alla linea CC e separati da una piccola distanza l_0 lungo la linea medesima. Consideriamo l'elemento $AA'B'B$. A causa del suo valore minimo, possiamo approssimare le curve AA' , NN' e BB' per mezzo di archi i cui centri cadano sul cosiddetto asse d'inclinazione O' . La superficie esterna della tavoletta, tra i punti A e A' è tesa, mentre quella interna tra i punti B e B' è compressa. Mancando l'atto di piegatura, le curve AA' e BB' avrebbero la stessa lunghezza e sarebbero equivalenti a l_0 (la misura della curva centrale NN') che conserva la propria lunghezza anche durante la piegatura. Definiamo R il raggio di curvatura di NN' .

Allora, $l_0 = R\alpha$, dove α è l'angolo centrale che sottende all'arco NN' . Quando la tavoletta non è molto spessa – cioè quando $h \ll R$ – la lunghezza della curva AA' sarà $l_1 = (R + h/2)\alpha$ e il suo allungamento relativo dovuto alla curvatura sarà $\Delta l = l_1 - l_0 = h\alpha/2$.

Secondo la legge di Hooke, la tensione sulla superficie esterna sarà

$$s = Y \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{Yh}{2R}$$

APPENDICE 2

Troviamo il raggio di curvatura della superficie di una tavoletta piegata in corrispondenza del punto centrale ($y=0$). Ricordate che se R è il raggio di curvatura di una curva in un dato punto, allora la circonferenza di raggio R che passa attraverso questo punto e il cui centro giace sulla perpendicolare della curva in questo punto, coincide (secondo la definizione di raggio di curvatura) con la curva entro una piccola distanza da questo punto. Quando $|py/l| \ll 1$ la funzione $x(y)$ diventa

$$x(y) = x_0 - \frac{x_0}{2} \left(\frac{p}{l} \right)^2 y^2.$$

Qui abbiamo usato la ben nota approssimazione $\cos \mathbf{g} = 1 - \mathbf{g}/2$ per $|\mathbf{g}| \ll 1$.

La circonferenza di raggio R e centro O' (figura 2) che passa attraverso il punto $(x_0, 0)$ e che veniva trattato in Appendice 1 è descritto dall'equazione

$$y^2 + (x - x_0 + R)^2 = R^2$$

che può essere facilmente risolta per determinare lo spostamento $x(y)$:

$$x(y) = x_0 - R + R \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}$$

Utilizzando anche un'altra formula approssimata, $\sqrt{1 - \mathbf{g}} \cong 1 - \mathbf{g}/2$ per $|\mathbf{g}| \ll 1$, avremo la formula successiva, corretta per $|y/R| \ll 1$:

$$x(y) = x_0 - \frac{y^2}{2R}$$

Comparando le due formule per $x(y)$ otteniamo il raggio di curvatura:

$$R = \left(\frac{l}{\mathbf{p}}\right)^2 \frac{1}{x_0}$$

APPENDICE 3

Troviamo la relazione tra lo spostamento x_0 del centro di una tavoletta appoggiata su due supporti e l'azione di una forza esterna F che è distribuita lungo le fibre centrali e diretta verso il basso. La massa della tavoletta verrà ignorata.

Poiché consideriamo una tavoletta simmetrica, la forza F è distribuita in modo uniforme tra i supporti. Consideriamo una sezione trasversale al centro della tavoletta (figura 2) e consideriamo una condizione di equilibrio per la metà sinistra.

La destra è soggetta alla forza esterna $F/2$ che è applicata vicino al bordo e diretta verso il basso. Tale forza è controbilanciata da quella, normale, del supporto sinistro. Possiamo vedere che la somma dei momenti relativi al centro della tavoletta verrà determinata solo dal momento dovuto alla resistenza del supporto di sinistra.

$$\mathbf{t} = \frac{Fl}{4}$$

D'altronde, questo momento è controbilanciato da quelli dovuti alla compressione e alla tensione applicate dalla parte destra della tavoletta alla parte sinistra nel piano della sezione trasversale. E' possibile derivare questo momento dalla formula per \mathbf{s} modificandola per calcolare la tensione nello spessore della tavoletta lungo l'asse y . Derivando la formula (Appendice 1) ne consegue che dovremo sostituire lo spostamento $h/2$ della linea NN' corrispondente al punto sulla superficie esterna della tavoletta con la

distanza \mathbf{d} da tale linea ($-h/2 < \mathbf{d} < h/2$). In questo caso la tensione nello spessore della tavoletta sarà:

$$\mathbf{s} = \frac{Y\mathbf{d}}{R}$$

Il momento totale dovuto alla tensione elastica e alle forze di compressione relative al centro della tavoletta sarà così uguale a:

$$\mathbf{t} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{d} = \frac{Y}{R} d \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{d}^2 d\mathbf{d} = \frac{Yh^3 d}{12R}$$

Inserendo il valore per il raggio di curvatura in questa equazione e uguagliando i termini di destra delle due formule per \mathbf{t} , troviamo la relazione tra la forza F e lo spostamento x_0

$$x_0 = \frac{3Fl^3}{\mathbf{p}^2 Y h^3 d}$$

Questa formula può essere riscritta nella forma $F = kx_0$ da cui si ricava la formula per la costante k dell'elasticità equivalente.

Bibliografia

- A. Borvoy, "Resistere sotto pressione", gennaio 1990, pp. 30-32
- A. A. Dozorov, "Spiccare un balzo", settembre/ottobre 1990, pp. 10-11
- A. Mineyev, "alberi degni di Paul Bunyan", gennaio/febbraio 1994, pp. 4-10
- A. Leonovich, Caleidoscopio, "Forme sformate", settembre/ottobre 1995, pp. 32-33
- L. Grodtko, "Onda su un pneumatico", novembre/dicembre 1998, pp. 10-12