

# SBIRCIANDO NELLE BUCHE DI POTENZIALE

Una buca di potenziale è una buca che non è ancora stata scavata –  
*Scientific Folklore*

di K. Kikoin

In fisica accade spesso di incontrare espressioni come “Una particella (o un sistema) è situata in una buca di potenziale”. Di che buca stiamo parlando? E perché una qualsiasi particella dovrebbe rimanerci intrappolata? Esaminiamo da vicino questa “caduta” di potenziale con l’aiuto di qualche esempio concreto, iniziando dal più semplice.

## La scatola e la pallina

Prendiamo una biglia di metallo e una scatola dal fondo non liscio, ma con cunette e vallate. Dopo aver rotolato e rimbalzato sulle pareti della scatola, la pallina si fermerà sul fondo di una delle vallate. Perché non sul versante, ad esempio, di una cunetta? Facile: perché sulla biglia agiscono due forze, quella di gravità (il suo peso)  $F_g$  e una forza normale  $F_n$ . Quando la biglia è sul versante della cunetta o di una vallata (figura 1) la forza risultante  $F$  è diretta verso il basso, quindi, per la seconda legge di Newton, la biglia aumenterà di velocità e si muoverà verso il fondo. Una volta sul fondo, le due forze  $F_g$  e  $F_n$  si annullano a vicenda, e la biglia si fermerà sul posto.

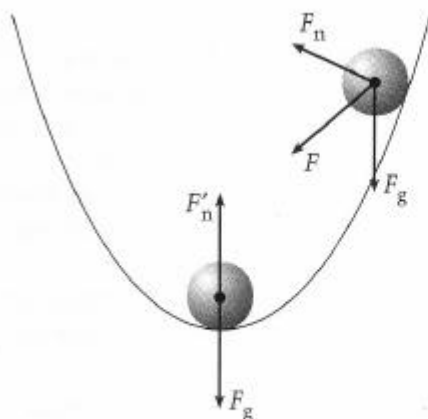


Figure 1

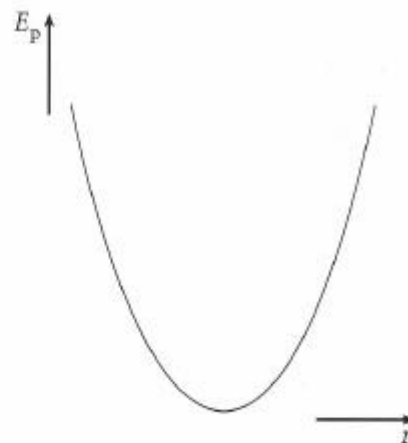


Figure 2

Ora, consideriamo lo stesso caso, ma da un’altra prospettiva. Una biglia che riposa sul fondo di una vallata non possiede energia cinetica. In altre parole, tutte l’energia della

biglia è potenziale ( $E_p$ ). Immaginiamo di muoverla dalla posizione di equilibrio. Ovviamente, bisognerà agire in opposizione alla forza di gravità per tutto il percorso verso l'alto sul versante della cunetta. Questo lavoro aumenterà il potenziale energetico della biglia. Tuttavia, se l'energia potenziale aumenta durante un qualsiasi spostamento  $r$  dalla posizione di equilibrio, essa, nella posizione di equilibrio risulta minima ( $r=0$ , figura 2).

Ora proviamo a seguire la conversione di energia di una biglia gettata nella scatola. All'inizio la biglia possiede un certo quantitativo di energia cinetica e potenziale. Il movimento in su e in giù per cunette e valli sul fondo della scatola è accompagnato dalla trasformazione di energia cinetica in potenziale e viceversa. Inoltre, c'è un importante processo che ha luogo in ogni momento: le forze d'attrito compiono un lavoro (l'energia risultante è dispersa sotto forma di calore nell'ambiente circostante). A lungo andare, la quantità totale di energia meccanica (cinetica più potenziale) diventerà così esigua da impedire alla biglia di fuoriuscire dalla vallata. Dopo varie oscillazioni, la biglia si fermerà sul fondo di una vallata. In questa posizione, tutta l'energia residua della biglia è potenziale. Inoltre, il valore di questa energia, all'interno della vallata, è minimo. La figura 3 mostra come è possibile avere due posizioni di equilibrio di una biglia all'interno di due vallate adiacenti anche se di profondità diverse.

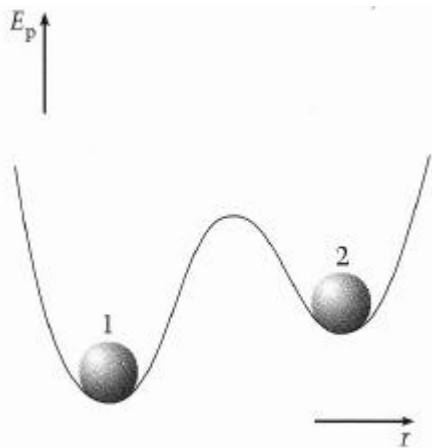


Figure 3

Ogni posizione di equilibrio è caratterizzata dal proprio minimo di energia potenziale, e  $E_{p_{\min 1}} < E_{p_{\min 2}}$  (questo significa che per spostare la biglia dalla posizione 1 alla posizione 2 bisogna compiere un lavoro meccanico). Arriviamo così ad un'altra definizione di equilibrio stabile: *l'equilibrio stabile di un oggetto corrisponde sempre al minimo della sua energia potenziale. In altre parole, quando è in equilibrio stabile un oggetto è situato in una buca di potenziale.*

L'esempio presentato è semplice e chiaro: per una pallina, la buca di potenziale è letteralmente una depressione o una zona bassa. Ora passiamo ad un oggetto per cui non è immaginabile una "buca" nel senso letterale del termine. Nondimeno, la buca di potenziale esiste, e ne determina lo stato di equilibrio.

### **La bolla di sapone**

Tutti i bambini sanno che le bolle di sapone sono rotonde. Ma saprebbero dire perché?

Per rispondere alla domanda, torniamo un momento al fenomeno della tensione superficiale. Da un punto di vista fisico, la bolla di sapone è una pellicola di liquido che delimita un volume riempito di gas. Con un buon ingrandimento, vediamo che la pellicola è costituita di due strati (interno ed esterno) con il liquido in mezzo. Le molecole che si trovano sulla superficie sono soggette a condizioni diverse da quelle che si trovano tra una superficie e l'altra. La molecola del liquido è circondata da molecole simili, il cui effetto su una data molecola è uguale a zero. Al contrario, una molecola superficiale risente dell'azione di forze considerevolmente diverse sia dal liquido che dal gas. Poiché la densità di un gas è di gran lunga inferiore rispetto a un liquido, la forza netta è sempre diretta verso l'interno, verso il liquido. Quindi, per potersi spostare dalla superficie, queste molecole devono compiere una data quantità di lavoro contro tali forze d'attrazione. In altre parole, le molecole superficiali hanno un'energia potenziale maggiore di quella delle molecole dell'interno. Ci riferiamo a questa energia potenziale in più come all'energia superficiale  $E_s$ :

$$E_s \sim S$$

oppure

$$E_s = \sigma S$$

Il coefficiente di proporzionalità  $\sigma$  è la tensione superficiale. E' uguale al rapporto tra il lavoro  $W$ , necessario per aumentare l'area superficiale di  $\Delta S$ , e  $\Delta S$  stesso.

Ogni liquido è caratterizzato da un proprio coefficiente di tensione superficiale.

Quando gonfiamo una bolla di sapone, il suo volume (e l'ampiezza della superficie della pellicola) aumentano, anche se la quantità di liquido che nel costituisce "l'involucro" rimane costante. Ovviamente, l'aumento dell'area superficiale è possibile solo perché alcune delle molecole dell'interno del liquido si spostano verso la superficie. Questo implica un certo lavoro compiuto per produrre lo spostamento e per aumentare l'energia di superficie.

Ora riusciamo a spiegare perché una bolla di sapone è sempre tonda e non, mettiamo, un ellissoide o un poliedro. La sfera possiede una meravigliosa caratteristica: tra tutti gli oggetti geometrici dello stesso volume, è quella con l'area superficiale inferiore. Quindi, se proviamo a deformare una bolla di sapone per renderla ellissoidale, dobbiamo compiere un lavoro per aumentare la sua area e la sua energia superficiale. In altre parole, la forma sferica corrisponde al potenziale energetico minimo della pellicola che ne costituisce l'involucro.

Viene da chiedersi cos'è che sta sul fondo della buca di potenziale, in questo esempio. Ovviamente non è una particella singola, poiché la tensione superficiale non risulta dal comportamento di molecole individuali, ma dall'interazione di una moltitudine di molecole. Non possiamo neanche affermare che la buca di potenziale contiene tutte le molecole della superficie, perché se varia il raggio della bolla, le molecole si muovono dalla superficie all'interno del liquido e viceversa. Inoltre, il moto termico produce uno scambio continuo delle molecole tra la superficie e gli strati profondi. *Pertanto, la buca di potenziale deve contenere tutto il liquido che costituisce la pellicola della bolla di sapone.*

Possiamo applicare il concetto di energia potenziale (e buca di potenziale) a questo problema solo perché esiste un parametro universale che descrive l'energia del sistema – l'area superficiale della bolla, che è proporzionale alla propria energia di superficie.

Per la precisione possiamo descrivere in questo modo solo metà della buca di potenziale relativa alla forma sferica di una bolla (figura 4).

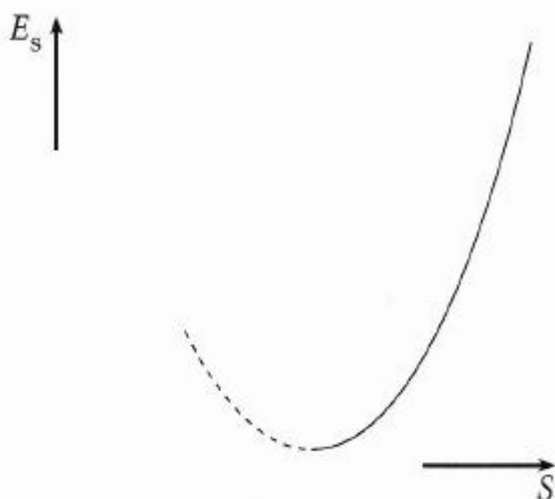


Figure 4

Possiamo diminuire l'area solo comprimendo la bolla, cioè compiendo un lavoro per comprimere il gas all'interno della bolla. L'aumento corrispondente dell'energia di sistema

in questo caso è rappresentato dalla linea spezzata nella figura 4. Quindi, in realtà, la buca di potenziale di una bolla di sapone contiene un sistema complesso costituito da "molecole della superficie del liquido + molecole interne del liquido + più molecole del gas all'interno della bolla".

## Il cristallo di ioni

Veniamo dunque all'ultimo esempio di sistema situato in una buca di potenziale. La forma della buca per questo sistema può essere determinata con precisione, ma a prezzo di calcoli piuttosto complessi. Tuttavia, un risultato approssimato è ottenibile con semplici ragionamenti. Scegliamo la seconda strada, sacrificando un po' di precisione in nome di una maggiore chiarezza.

Il sistema in questione è un cristallo a legame ionico, come per esempio il sale da cucina (NaCl). E' risaputo che gli atomi (ioni) nei corpi cristallini formano dei reticoli geometrici regolari. Il cristallo di sale da cucina ha una semplice struttura cubica, i cui nodi contengono ioni sodio positivi ( $\text{Na}^+$ ) e di cloruro negativi ( $\text{Cl}^-$ ), disposti come su una scacchiera tridimensionale (figura 5).

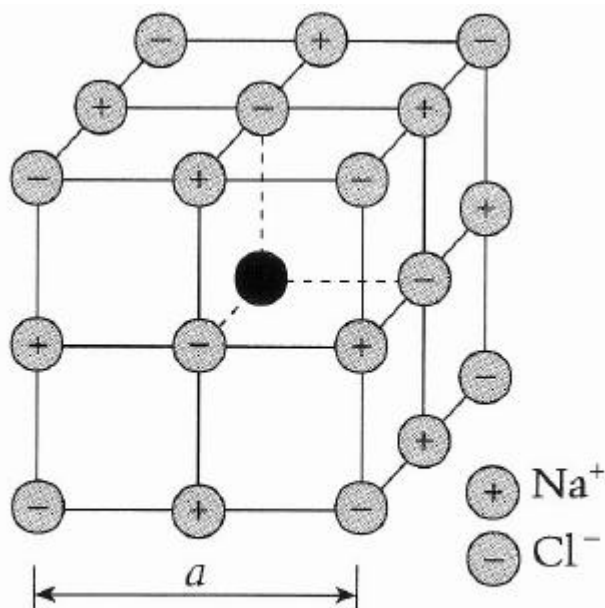


Figure 5

Ogni ione di  $\text{Na}^+$  è adiacente a sei ioni di  $\text{Cl}^-$ , e ogni ione di  $\text{Cl}^-$  ne ha sei di  $\text{Na}^+$  per vicini. La distanza tra due identici ioni sulla superficie del cubo è chiamata costante di reticolo  $a$ . Per poter immaginare la forma di una buca di potenziale di un dato cristallo, dobbiamo prima conoscerne l'energia potenziale totale, che è l'energia dell'interazione tra tutti gli ioni nel cristallo. Consideriamo innanzitutto l'energia di interazione tra gli ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$

adiacenti. Tale interazione è composta dall'attrazione elettrostatica e dalla repulsione quantomeccanica, che impedisce agli ioni di avvicinarsi troppo tra loro.

Possiamo descrivere l'interazione applicando il concetto di potenziale. Immaginiamo uno ione di sodio situato in un campo d'attrazione elettrostatica e di repulsione quantica generato da uno ione di cloruro. Secondo l'elettrostatica il potenziale d'attrazione è  $-ke/r$ . Dove  $k$  è la costante di Coulomb, e la carica di uno ione monovalente uguale alla carica di un elettrone, e  $r$  la distanza tra gli ioni di sodio e di cloruro. Di norma non si conoscono espressioni precise per il potenziale di repulsione dei vari ioni, ma possiamo descriverla per approssimazione con la funzione di potenza a decremento rapido  $b/r^n$ , dove  $b$  è una costante data. Consideriamo 9 l'esponente  $n$  per cristalli simili a NaCl. Allora, uno ione  $\text{Na}^+$  è situato in un campo di ioni  $\text{Cl}^-$  negativi il cui potenziale è descritto dalla seguente formula:

$$U^-(r) = -\frac{ke}{r} + \frac{b}{r^n}$$

Poiché  $n$  è un valore considerevole, su piccole distanze il potenziale di repulsione aumenta con grande rapidità, e diventa molto più consistente del potenziale di attrazione. A distanze maggiori il potenziale di repulsione è virtualmente zero, quindi il potenziale totale coincide con quello d'attrazione. Ne risulta che  $U^-(r)$  assume l'aspetto di una curva con un minimo e forma la buca di potenziale per lo ione sodio (figura 6).

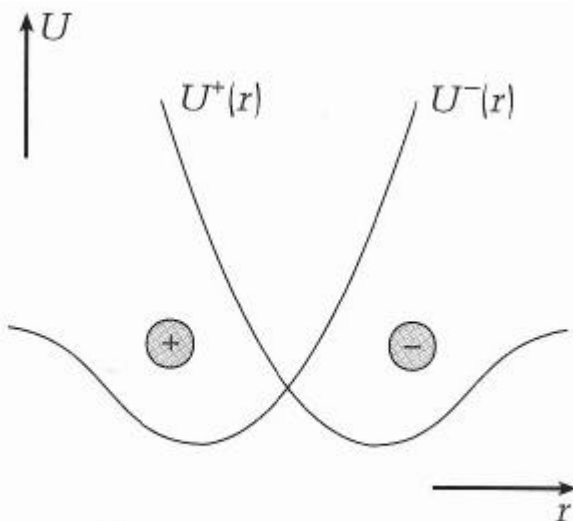


Figure 6

A sua volta, lo ione sodio genera una buca simile per intrappolare lo ione cloruro adiacente. Quindi, due ioni adiacenti si creano l'un l'altro buche di potenziale, attraverso la

repulsione su piccole distanze, e attrazione a distanze più grandi. In tal modo entrambi gli ioni riescono a mantenere una condizione di equilibrio stabile.

Naturalmente un cristallo è un sistema molto più complesso dell'improbabile coppia di ioni da noi ipotizzata. Infatti, oltre ad essere circondato da ioni di segno opposto, ogni atomo del cristallo è soggetto anche all'azione degli ioni più lontani, che contribuiscono a formare la funzione di potenziale totale. Inoltre, anche se un cristallo è limitato, possiamo considerare infinito il numero di atomi che lo compongono. Prendiamo proprio il sale da cucina: un cristallo è largo 0.1 mm, mentre la costante reticolare è  $a \sim 10^{-8}$  cm, quindi uno spigolo di cristallo è composto da  $\sim 10^6$  atomi. L'area di un lato e il volume di un cristallo di sale da cucina hanno rispettivamente  $10^{12}$  e  $10^{18}$  ioni identici.

Il calcolo dell'interazione tra tutti gli atomi che compongono un cristallo sembrerebbe arduo, a prima vista. Tuttavia, con un'abile stratagemma che si basa su certe proprietà fisiche fondamentali, è possibile venire a capo del problema in pochi passaggi. Per i dettagli vi rimandiamo al Supplemento II, qui riportiamo solo il risultato finale. L'energia potenziale totale di tutti gli ioni che compongono il cristallo è descritta dalla seguente formula:

$$U_{cr}(a) = -\frac{Ae^2}{a} + \frac{B}{a^n}$$

Dove  $A$  e  $B$  sono costanti. Il grafico della funzione è una curva con un minimo (cioè con una buca di potenziale). Cosa c'è sul fondo? Naturalmente l'intero cristallo. Questo significa che la costante reticolare prende un valore  $a_0$  in stato d'equilibrio, che corrisponde al minimo dell'energia potenziale.

Per riassumere, abbiamo esaminato tre oggetti a prima vista molto diversi tra loro. Tuttavia, emerge una caratteristica comune – l'energia potenziale in tutti prende la forma di una curva col minimo. In casi generali la forma di una buca di potenziale può essere più complessa (in particolare l'energia potenziale può dipendere da molti parametri piuttosto che da uno solo). Eppure, il principio generale rimane lo stesso: *ogni sistema in stato di equilibrio stabile ha l'energia potenziale al minimo, cioè è posto in una buca di potenziale.*

## Supplemento I

Calcoliamo il potenziale  $\Phi_1$  generato al punto 1 con coordinata  $r_1$  da una carica elettrica  $+e$  situata all'origine del sistema di coordinate (figura 7).

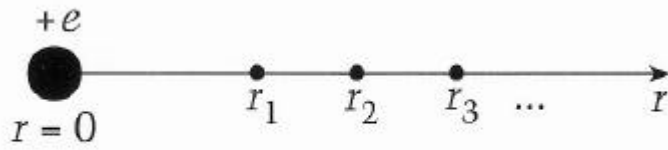


Figure 7

Questo potenziale è uguale al lavoro di un campo elettrico necessario per muovere una carica positiva unitaria da un dato punto a infinito.

Andiamo a piazzare una carica di prova  $q$  al punto 1. Secondo la legge di Coulomb, è soggetto a una forza  $F = kqe/r_1^2$  dovuta alla presenza della carica  $e$ . Ora calcoliamo il lavoro  $W_{1-2}$  necessario per spostare la carica  $q$  dal punto 1 al punto 2. Per semplificare i calcoli, scegliamo una distanza  $r_2 - r_1$  così piccola che possiamo considerare costante la forza su tutto l'intervallo 1-2:  $F_1 = kqe/r^2 = kqe/(r_1 r_2)$ . Così:

$$W_{1-2} = F_1(r_2 - r_1) = \frac{kqe}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Similmente, possiamo calcolare il lavoro  $W_{2-3}$  per spostare la carica  $q$  dal punto 2 al vicino punto 3:

$$W_{2-3} = F_2(r_3 - r_2) = \frac{kqe}{r_2 r_3} (r_3 - r_2) = kqe \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

Ovviamente il lavoro del campo nell'intervallo 1-3 è uguale alla somma del lavoro compiuto negli intervalli 1-2 e 2-3:

$$W_{1-3} = W_{1-2} + W_{2-3} = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + kqe \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right)$$

Proseguendo con i calcoli, vediamo che i punti intermedi non hanno importanza, e che l'espressione risultante per il lavoro contiene solo le coordinate dei punti d'inizio e fine. Quindi, il lavoro che compie un campo elettrico per spostare una carica di prova  $q$  dal punto 1 a infinito ( $1/r_\infty = 0$ ) è uguale a :

$$W_1 = kqe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_\infty} \right) = \frac{kqe}{r_1}$$

Infine, il potenziale al punto 1 è determinato dalla formula

$$j_1 = \frac{W_1}{q} = \frac{ke}{r_1}$$

Chi di voi conosce gli integrali può ottenere questo risultato con un solo passaggio (se mai vi servisse un incentivo per imparare il calcolo matematico).

## Supplemento II

Per trovare l'energia potenziale totale di un cristallo, iniziamo col calcolarne l'energia elettrostatica. Consideriamo uno ione sodio  $\text{Na}^+$  situato al centro del reticolo cubico mostrato nella figura 5. I suoi immediati vicini sono sei ioni cloruro posti alla distanza  $r=a/2$ . Ognuno di questi ioni cloruro genera un potenziale  $-ke/r=-2ke/a$ . Secondo il principio di sovrapposizione, il potenziale di diverse cariche è uguale ai potenziali generati individualmente da ogni carica. Quindi, i sei ioni di cloruro generano un potenziale di  $-12ke/a$ . Il gruppo successivo di ioni più vicini sono 12 atomi di sodio posti alla distanza  $a/\sqrt{2}$  dallo ione sodio prescelto (centrale). Questi ioni sodio generano un potenziale totale di  $+12\sqrt{2}ke/a = +16.97ke/a$ . Proseguendo i calcoli, vediamo che il gruppo successivo genera un potenziale di  $-9.24ke/a$  e il seguente un potenziale di  $+6ke/a$  e così via. Non c'è una regolarità in questa successione (ad esempio, il diciannovesimo gruppo di cariche influisce con un potenziale di  $-3.08ke/a$  sul totale), quindi è inutile procedere con una somma infinita aggiungendo via via le varie serie di atomi. Tuttavia, qualcosa di interessante c'è: i segni dei membri che compongono le serie si alternano, e questo implica la possibilità di una redistribuzione degli addendi per calcolare la somma totale. Ed è proprio così: la redistribuzione ha luogo, sulla base del concetto di neutralità elettrica.

Calcoliamo ora la carica totale di tutti gli ioni del cubo mostrato nella figura 5. Poniamo che solo metà di ogni ione posto su una faccia appartiene al cubo, un quarto di quelli posti sullo spigolo, e un ottavo di quelli posti sull'angolo. Questo assunto non è casuale: se suddividiamo l'intero cristallo in cubi simili a quello preso in considerazione, vedremo che lo ione su una faccia appartiene a due cubi, quello sullo spigolo a quattro e quello all'angolo a otto. Il nostro risultato migliore è questo: la carica totale di un cubo siffatto composto di cariche parziali è esattamente zero! In altre parole, abbiamo trovato un modo di dividere il cristallo in celle elettricamente neutrali. L'energia di Coulomb del cubo neutrale è

$$-\frac{12}{2} \frac{ke^2}{a} + \frac{16.97}{4} \frac{ke^2}{a} - \frac{9.24}{8} \frac{ke^2}{a} = -2.91 \frac{ke^2}{a}$$

Consideriamo ora un insieme più complesso di ioni. Sarà composto dal cubo iniziale (con ioni interi) avvolto in uno strato singolo di ioni frammentati. Lo spigolo di questo

nuovo cubo è  $2a$ ; gli ioni del cubo interno appartengono completamente al nuovo oggetto, mentre solo una metà, un quarto e un ottavo degli ioni del rivestimento appartengono al sistema, a seconda della loro posizione. E' una suddivisione più complessa rispetto al cubo di celle neutrali. Ci aspettiamo che l'energia potenziale risultante sia più precisa. Infatti, l'energia elettrostatica della nuova cella è  $-3.50ke^2/a$ . Se prendiamo un cubo elettrostaticamente neutrale con lato di  $3a$  la sua energia sarà  $-3.49ke^2/a$ . Ulteriori aumenti di volume del cubo non sortiscono risultati apprezzabili, e alla fine otteniamo un valore per la sua energia approssimativamente di  $-3.495ke^2/a$ .

La stessa idea di dividere l'intero cristallo in celle elementari suggerisce un altro metodo di approssimazione per l'energia del cristallo. Prendiamo uno ione con carica  $+1$  e circondiamolo con una sfera di raggio  $a$  riempita di cariche negative uniformemente distribuite il cui valore totale sia  $-1$ . Calcolando l'energia elettrostatica di questa sfera neutra ricaviamo il valore  $-3.6ke^2/a$ , che è assai prossimo a quello giusto.

Così, un modello adeguato, che tenga conto delle caratteristiche essenziali di un processo fisico riesce a semplificare di molto i nostri calcoli.

Paradossalmente, l'energia associata con la repulsione quantistica può essere calcolata in maniera ancora più semplice, anche se la natura di tale repulsione non lo è affatto. Il potenziale repulsivo diminuisce considerevolmente con la distanza. Quindi prendiamo in considerazione la repulsione attiva tra atomi confinanti alla distanza di  $a/2$  l'uno dall'altro. In questa approssimazione, l'energia repulsiva totale è la somma delle energie repulsive ("interazione di coppia") contata per tutte le coppie di ioni. Abbiamo subito  $+B/a^{12}$ , dove  $B=Nb$ ,  $N$  essendo il numero di coppie in una cella. L'energia elettrostatica corrispondente agli ioni individuali che abbiamo calcolato sopra, deve anch'essa essere moltiplicata per il fattore  $N$ . Quello che ne risulta è la formula per l'energia totale del cristallo cubico utilizzata all'interno dell'articolo.

Articoli pubblicati su **Quantum** sul potenziale e sui cristalli

A. Eisenkraft e L.D. Kirkpatrick, "Elettricità nell'aria", Novembre/dicembre 1992, pp. 46-48

Y. Bruk e A. Stasenko, "Corpi celesti solidi", Luglio/agosto 1993, pp. 34-38

A. Stasenko, "Dai confini dell'Universo al Tartaro", Marzo/aprile 1996, pp. 4-8

V. Meshcheryakov, "Agglomerati planetari", Luglio/agosto 1998, pp. 4-8

A. Leonovich, "Avete potenziale?", Novembre/dicembre 1998, pp. 28-29

A. Dozorov, "Multipoli elettrici", Settembre/ottobre 1999, pp. 4-8

G. Myakishev, "L'interazione molecolare da vicino", Maggio/giugno 2000, pp. 8-13