

INCIDENTE SUL TRENO

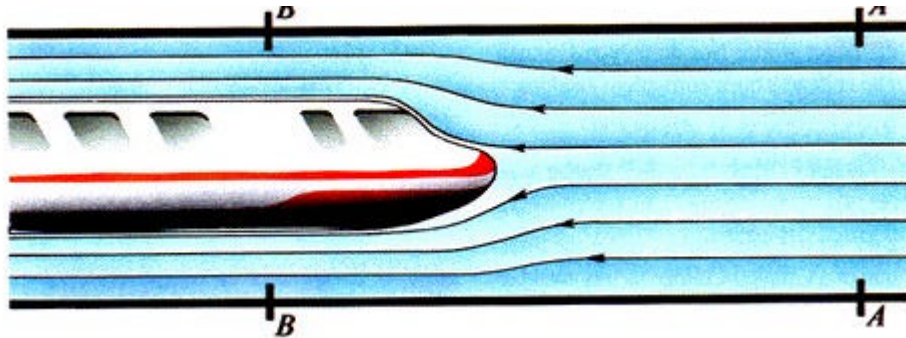
Un mistero alla Agatha Christie, ma lei stavolta non c'entra

di Carlo Camerlingo (Italia) e Andreij Varlamov

Non tanto tempo fa, gli autori di questo articolo erano in viaggio di ritorno sull'espresso partito da Venezia e diretto a Napoli. Il treno si muoveva a gran velocità (approssimativamente 150 km/h), e il paesaggio, che sembrava quello ritratto dai maestri del Rinascimento, ci scivolava accanto mentre guardavamo dal finestrino. Proprio come la sua versione su tela, il panorama era collinoso, e di tanto in tanto si volava su un ponte o ci si immergeva in una galleria. In una di queste, particolarmente lunga, tra Bologna e Firenze, abbiamo accusato un improvviso dolore alle orecchie, proprio come succede ai passeggeri di un aereo in fase di decollo o di atterraggio. Era chiaro, guardandosi intorno, che i nostri compagni di viaggio avevano provato la stessa fastidiosa sensazione: tutti scuotevano la testa cercando di liberarsene. Ma quando poi il treno sbucò dall'altra parte del tunnel, il dolore passò e solo uno di noi, che non era nuovo a queste sorprese in treno, si dimostrò interessato all'origine del fenomeno. Poiché era evidentemente collegato alla differenza di pressione, iniziammo una vivace discussione sulle possibili cause fisiche. A prima vista ci sembrò che la pressione dell'aria nello spazio tra le pareti del tunnel e il treno fosse aumentata rispetto alla pressione atmosferica, ma esistevano ragioni qualitative per aspettarsi esattamente l'opposto. In simili questioni, la matematica è un ottimo giudice, quindi iniziammo a cercare una risposta numerica al problema. Molto presto arrivammo a una conclusione, che riportiamo in questa sede.

Consideriamo la sezione trasversale S_t di un treno che viaggia alla velocità v_t in un lungo tunnel con sezione S_0 . Prima di tutto, passiamo al sistema di coordinate inerziali associato con il treno. Assumiamo che la corrente d'aria sia stazionaria e laminare, e non teniamo conto della sua densità. Il movimento relativo delle pareti del tunnel rispetto al treno nel nostro caso può essere ignorato – a causa dell'assenza di densità, non influisce sulla corrente d'aria. Inoltre, consideriamo il nostro treno lungo abbastanza da "azzerare" la

turbolenza sulla prima e sull'ultima carrozza, e la pressione dell'aria come stabile e costante lungo tutta la superficie del treno.



Quindi, eliminando uno ad uno i dettagli secondari, siamo passati dal movimento di un treno reale a un modello più semplice che possiamo tentare di descrivere matematicamente, nel modo che segue.

Abbiamo un lungo tubo (il tunnel) e un cilindro dalle estremità aerodinamiche (il treno) inserito all'interno in modo coassiale. Lungo il tubo passa dell'aria, lontano dal treno (la sezione A-A della figura); la pressione dell'aria p_0 è equivalente a quella atmosferica e la velocità del flusso d'aria v_t è uguale e di segno opposto a quella del treno prima dell'ingresso nel nostro sistema di calcolo.

Ora consideriamo la sezione B-B, situata lontano dalle estremità del treno per mantenere validi gli assunti fatti in precedenza. Chiamiamo p_B la pressione dell'aria su questa sezione e v_B la sua velocità. Questi valori possono essere collegati a v_t e p_0 mediante l'equazione di Bernoulli:

$$p_B + \frac{\mathbf{r}v_B^2}{2} = p_0 + \frac{\mathbf{r}v_t^2}{2} \quad (1)$$

dove \mathbf{r} è la densità dell'aria.

L'equazione (1) ha due incognite, p_B e v_B , quindi per determinare p_B abbiamo bisogno di un'altra relazione. Questa è indicata dalla condizione di conservazione della massa d'aria che fluisce attraverso una qualsiasi sezione del tubo in un dato momento:

$$\mathbf{r}v_t S_0 = \mathbf{r}v_B (S_0 - S_t) \quad (2)$$

Questa equazione esprime il concetto secondo cui la massa d'aria non può né apparire né sparire mentre fluisce lungo il tubo. E' normalmente chiamata condizione di continuità di flusso.

Come probabilmente avrete notato, nelle equazioni (1) e (2) abbiamo considerato costante la massa d'aria. L'assunto è valido fintantoché le velocità dell'aria in diverse sezioni del

tubo risultino molto inferiori alla velocità media quadratica del moto molecolare caotico. E' proprio tale velocità che stabilisce il tempo caratteristico richiesto per determinare la densità media dei gas su scala macroscopica.

Sbarazzandoci della velocità v_B nell'equazione (1) attraverso l'equazione (2) otteniamo:

$$p_B = p_0 - \frac{\mathbf{r}v_t}{2} \left[\left(\frac{S_0}{S_0 - S_t} \right)^2 - 1 \right] \quad (3)$$

La densità dell'aria \mathbf{r} può essere espressa in termini di p_0 con l'equazione di Mendelejev-Clapeyron: $\mathbf{r} = p_0 \mathbf{m} / RT$. A sostituzione avvenuta, avremo:

$$p_B = p_0 \left\{ 1 - \frac{\mathbf{m}^2}{2RT} \left[\left(\frac{S_0}{S_0 - S_t} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (4)$$

In questa espressione abbiamo una combinazione di parametri, \mathbf{m}^2 / RT , che è, evidentemente, adimensionale. Quindi, il valore $(RT / \mathbf{m})^{1/2}$ ha la dimensionalità fisica della velocità. E' facile riconoscerci la velocità media quadratica del moto molecolare caotico (con la precisione di una potenza). Ma nel nostro problema aerodinamico è importante un'altra caratteristica dei gas: la velocità di propagazione del suono v_s in essi. Questo valore è determinato dalla stessa combinazione di temperatura e massa molecolare come la velocità media quadratica del moto molecolare, ma il valore numerico di v_s dipende anche dal cosiddetto indice adiabatico \mathbf{g} , un numero caratteristico per ogni gas dell'ordine di 1 (per l'aria, $\mathbf{g} = 1.41$):

$$v_s = \sqrt{\mathbf{g} \frac{Rt}{\mathbf{m}}} \quad (5)$$

In condizioni normali, $v_s = 1200$ km/h. Utilizzando l'equazione (5) possiamo riscrivere l'espressione per la pressione (4) in forma definitiva, una che sia conveniente alla discussione che segue (sostituendo $\mathbf{m} / RT = \mathbf{g}_s^2$):

$$p_B = p_0 \left\{ 1 - \frac{\mathbf{g}}{2} \left(\frac{v_t}{v_s} \right)^2 \left[\left(\frac{S_0}{S_0 - S_t} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (6)$$

Ora fermiamoci a riflettere un momento. Abbiamo calcolato la pressione nel tunnel vicino al treno. Ma il dolore all'orecchio non è comparso per la pressione, quanto per la sua variazione rispetto alla pressione p_B' cui è soggetto il treno quando è all'aria aperta¹.

¹ Dobbiamo sottolineare due aspetti. In primo luogo, in biofisica c'è la cosiddetta legge di Weber-Hefner secondo cui ogni cambiamento all'esterno viene percepito dal corpo solo quando la variazione relativa supera una certa soglia di

Possiamo determinare la pressione esterna dall'equazione (6), con la premessa che l'aria aperta può essere assimilata a un tunnel con sezione $S_0 \rightarrow \infty$. Quindi avremo:

$$p_B' = \lim_{S \rightarrow \infty} p_B(S_0) = p_0 \left\{ 1 - \frac{g}{2} \left(\frac{v_t}{v_s} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{1 - \lim_{S_0 \rightarrow \infty} \frac{S_t}{S_\infty}} \right)^2 - 1 \right] \right\}$$

Questo risultato era abbastanza evidente anche senza calcoli. E' interessante osservare che la relativa differenza di pressione è:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p_B - p_0}{p_0} = \frac{g}{2} \left(\frac{v_t}{v_s} \right)^2 \left[\left(\frac{S_0}{S_0 - S_t} \right)^2 - 1 \right] \quad (7)$$

Da questa espressione possiamo vedere che nel momento in cui il treno entra nel tunnel la pressione accanto a lui *diminuisce* al contrario di quanto saremmo portati a pensare.

Ora, proviamo a stabilire la portata di tale effetto. Come abbiamo accennato in precedenza, $v_t = 150$ km/h, $v_s = 1200$ km/h; per gallerie ferroviarie molto strette, la proporzione S_t / S_0 è di 1/4 (nel nostro tunnel ci sono due serie di binari). Quindi:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \cong - \left(\frac{1.41}{2} \right) \left(\frac{1}{8} \right)^2 \left(\frac{16}{9} - 1 \right) \cong -1\%$$

Questo risultato può sembrare molto esiguo, ma se consideriamo che $p_0 = 10^5$ N/m e l'area del timpano $S = 1 \text{ cm}^2$, otteniamo una forza in eccesso $\Delta F = \Delta p S \cong 0.1 \text{ N}$, che può essere considerevole.

Così, sembrerebbe spiegato il fenomeno, e potremmo anche terminare qui. Ma rimane un dubbio a proposito dell'ultima equazione. Più precisamente, dall'espressione (7) consegue che anche nel caso di una velocità normale, per un comune treno $v_t \ll v_s$ (tale combinazione di velocità si incontra continuamente in aerodinamica, ed è chiamata numero di Mach), in gallerie sufficientemente strette il valore $|\Delta p|$ può raggiungere e perfino superare la pressione normale p_0 ! E' evidente che, nel quadro delle nostre premesse, abbiamo ottenuto un risultato assurdo: la pressione tra le pareti del tunnel e il treno è negativa!

Ma... un momento! Può darsi che esista un limite, valicato il quale il nostro risultato cessa di essere valido. Esaminiamo la cosa nei dettagli. Se $|\Delta p| \cong p_0$, allora

valori. Inoltre, nel caso questo accada, se il tunnel è abbastanza lungo, il corpo ha il tempo di adattarsi eliminando così il disturbo; il quale, tuttavia, si ripresenterà all'uscita dalla galleria per gli stessi motivi.

$$\frac{v_t}{v_s} \left(\frac{S_0}{S_0 - S_t} \right) \cong 1$$

e quindi

$$v_t S_0 \cong v_s (S_0 - S_t)$$

Paragonando l'ultima espressione con l'equazione (2), cominciamo a capire il problema. Se Δp raggiunge p_0 , la velocità dell'aria che scorre nello spazio tra il treno e le pareti di un tunnel così stretto risulta essere nell'ordine della velocità del suono, e non può più definirsi laminare². Quindi, la condizione giusta per applicare l'equazione (7) non è semplicemente $v_t \ll v_s$, ma una più rigida:

$$v_t \ll \left(v_s \left(\frac{S_0 - S_t}{S_0} \right) \right)$$

E' evidente che treni e gallerie reali soddisfano sempre questa condizione. In ogni caso, la nostra indagine nel limite di applicabilità dell'equazione (7) non è solo un puro esercizio matematico. Un fisico è tenuto a riconoscere il limite di validità dei risultati che ottiene. Ma un'altra ragione per prenderlo in considerazione, nel nostro caso è di origine pratica. Negli ultimi decenni si è discusso sempre più spesso di nuovi mezzi di trasporto, compresi i treni ad alta velocità. Uno di tali modelli si muove su un cuscino magnetico ottenuto da un potente magnete superconduttore. Esistono già veicoli del genere; sembra che un prototipo di treno maglev (a levitazione magnetica) in Giappone possa trasportare 20 passeggeri su un percorso di prova di 7 km ad una velocità massima di 516 km/h – cioè circa la metà della velocità del suono! Poiché il treno non tocca le traversine metalliche, la resistenza al suo movimento è data solo dalle sue proprietà aerodinamiche.

Il passo successivo nello sviluppo di questi mezzi di trasporto consiste nell'idea – potete anche non crederci – di inserire il treno in un tubo sigillato ermeticamente e ridurre la pressione pompando fuori l'aria. Vedete come tutto ciò è molto vicino al problema che ci ha tanto affascinato. Ma qui i fisici e gli ingegneri hanno a che fare con un caso molto più complesso, in cui $v_t \cong v_s$ e $S_0 - S_t \ll S_0$. Il flusso dell'aria è tutt'altro che laminare e la sua temperatura cambia considerevolmente con il treno in movimento. La scienza moderna non ha le risposte a tutti i quesiti che sorgono quando si cerca di risolvere simili problemi. Ma anche la nostra semplice analisi ci consente, in linea di principio, di stimare la soglia oltre la quale tali effetti diventano importanti.

² Cioè, il flusso diventa turbolento

Vorremmo concludere con tre domande sulla fisica che potrebbero tornarvi in mente durante un viaggio in treno.

1. Perché i finestrini tremano quando viaggiate a velocità sostenuta e un altro treno veloce vi passa accanto in direzione opposta? La forza responsabile del fenomeno è diretta verso l'interno o verso l'esterno?
2. Perché i rumori prodotti da un treno in movimento diventano più forti quando si entra in un tunnel?
3. Quale delle due rotaie di una linea ferroviaria costruita lungo un meridiano si consuma prima nell'emisfero Nord? E nell'emisfero Sud?